**A szintfelmérő megoldása**

1. Adottak a következő halmazok:
$A = \{2k|k \in \mathbb{N}\}$
$B = \{$5-tel osztható pozitív egészek$\}$
$C = \{$20-nál kisebb egészek$\}$
$D = \{x|x \in \mathbb{Z}$ és $|x| < 10\}$
Adja meg a következő halmazokat:
$A \cap B$ , $A \cap B \cap C$ , $B \cap C$ , $A \setminus B$ , $C \setminus A$ , $\overline{A}$ , $C \cup D$.

**Megoldás:**

$A \cap B = \{$10-zel osztható pozitív egészek$\}$
$A \cap B \cap C = \{10\}$
$B \cap C = \{5, 10, 15\}$
$A \backslash B = \{$azok a természetes számok, amelyek párosak, de 5-tel nem oszthatóak$\}$
$C \setminus A = \{$20-nál kisebb páratlan természetes számok és a negatív egészek$\}$
$\overline{A} = \{$páratlan természetes számok$\}$
$C \cup D = \{x|x \in \mathbb{Z}$ és $-10 < x < 20\}$.

2. $a$=?, $b$=? , ha 12-vel osztható a következő 6-jegyű tizes számrendszer beli szám: $23a1b4$.

**Megoldás:**

12-vel akkor és csak akkor osztható egy szám, ha 3-mal is és 4-gyel is osztható.
Először a 4-gyel való oszthatóságot vizsgaljuk. 4-gyel akkor osztható egy szám, ha az utolsó 2 számjegyéből alkotott kétjegyű szám osztható 4-gyel. Ez a következő lehetőségekeket adja $b$-re: 0,2,4,6,8.
3-mal akkor osztható egy szám, ha a számjegyeinek összege osztható 3-mal. Ez $b = 0$ esetén a következő $a$ értékeket adja: 2,5,8.

$b = 2$ esetén $a$ lehetséges értékei: 0,3,6,9.
$b = 4$ esetén $a$ lehetséges értékei: 1,4,7.
$b = 6$ esetén $a$ lehetséges értékei: 2,5,8.
$b = 8$ esetén $a$ lehetséges értékei: 0,3,6,9.
Tehát összesen 17 megoldás van.

3. **Megoldás:**

a) $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{7} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{14}$.

b) $\frac{3}{5} + \frac{7}{3} - \frac{5}{2} = \frac{18+70-75}{30} = \frac{13}{30}$

c) $\frac{2}{3} : \frac{7}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$

d) $\frac{3}{4} + \frac{7}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{4} + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{4} + \frac{7}{10} = \frac{15+14}{20} = \frac{29}{20}$

4. Ábrázolja derékszögű koordináta-redszerben a következő függvényeket: $f(x) = 2 \cdot (x-1)^2 - 3$; $g(x) = -\sqrt{x+2} + 1$; $h(x) = 3 \cdot |x-3| - 2$.

5. Alakítsa szorzattá a következő kifejezéseket:

**Megoldás:**

a) $1-(2a-3b)^2 = (1-(2a-3b)) \cdot (1+(2a-3b)) = (1-2a+3b) \cdot (1+2a-3b)$
b) $a^2 - 6a + 9 = (a-3)^2$
c) $1 - p^3 = (1-p) \cdot (1+p+p^2)$

6. Hozza egyszerűbb alakra, majd számolja ki a helyettesítési értékeket, ha $x = 2, a = 2, b = 3$

**Megoldás:**

a) $\frac{5}{x-3}-\frac{x-2}{x^2-9}+\frac{x-1}{2x+6}=\frac{5}{x-3}-\frac{x-2}{(x-3)(x+3)}+\frac{x-1}{2(x+3)}=\frac{2\cdot5(x+3)-2(x-2)+(x-1)(x+3)}{2(x-3)(x+3)}=$
$\frac{10x+30-2x+4+x^2-x-3x+3}{2(x^2-9)}=\frac{x^2+4x+37}{2(x^2-9)}$
$x=2$ esetén: $\frac{4+8+37}{2(4-9)}=-4,9$

b) $\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}\cdot\frac{3a+3b}{5a-5b}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)^2}\cdot\frac{3(a+b)}{5(a-b)}=\frac{a-b}{a+b}\cdot\frac{3(a+b)}{5(a-b)}=\frac{3}{5}$
a kifejezés értéke tehát minden $a,b$ esetén $\frac{3}{5}$.

7. **Megoldás:**

a) $|2-x|=2x+1$

1.eset: ha $2-x\geq 0$, azaz $x\leq 2$.
Ekkor az egyenlet:
$2-x=2x+1$
amiből: $x=\frac{1}{3}$

2.eset: ha $2-x<0$, azaz $x>2$.
Ekkor az egyenlet:
$-2+x=2x+1$
amiből: $x=-3$, ami nem eleme a kikötés által meghatározott $(2,\infty)$ intervallumnak, így ebben az esetben nincs az egyenletnek megoldása.
Tehát összesen 1 db megoldás van, az $x=\frac{1}{3}$.

b) $\frac{2x-7}{4-x}>1$

$\frac{2x-7}{4-x}-1>0$

$\frac{2x-7}{4-x}-\frac{4-x}{4-x}>0$

$\frac{3x-11}{4-x}>0$

Egy tört akkor és csak akkor pozitív, ha azonos előjelű a számlálója és a nevezője.

1.eset: $3x - 11 > 0$ és $4 - x > 0$,
azaz $x > \frac{11}{3}$ és $x < 4$, azaz $\frac{11}{3} < x < 4$.

2.eset: $3x - 11 < 0$ és $4 - x < 0$,
azaz $x < \frac{11}{3}$ és $x > 4$, ez együtt nem lehet, tehát ebben az esetben nincs megoldás.

c) $(2x + 2) \cdot (x - 1) = 5x + 6$
$2x^2 + 2x - 2x - 2 = 5x + 6$
$2x^2 - 5x - 8 = 0$
$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+64}}{4}$
$x_1 \approx 3,61$
$x_2 \approx -1,11$

d) Egyenlő együtthatók módszerével kiejtjük az $x$-et.
Ehhez az 1. egyenletet 3-mal, a 2.-at 2-vel szorozzuk:
$4x + 3y = -4$ és $6x + 5y = -7$
$12x + 9y = -12$ és $12x + 10y = -14$
kivonva az 2.-ból a 1.-t kapjuk:
$y = -2$, amiből $x = 0,5$.

e) $-5 \sin^2 x + 7 \cos x = -7$
$-5 \cdot (1 - \cos^2 x) + 7 \cos x = -7$
$y := \cos x$ új ismeretlen bevezetésével, átrendezés után:
$5y^2 + 7y + 2 = 0$
$y_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-40}}{10}$
$y_1 = -\frac{2}{5} \Rightarrow \cos x_1 = -\frac{2}{5} \Rightarrow x_{11} = 113,6° + k \cdot 360°, x_{12} = -113,6° + l \cdot 360°$
$y_1 = -1 \Rightarrow \cos x_1 = -1 \Rightarrow x_2 = 180° + m \cdot 360°$,

ahol $k, l, m \in \mathbb{Z}$.

8.

a) Két szám összege 76, különbségük 18. Melyik ez a két szám?

**Megoldás:**

$x + y = 76$ és $x - y = 18$

Összeadva a két egyenletet kapjuk: $2x = 94$, azaz $x = 47$, amiből $y = 29$.

Tehát ez a két szám a 29 és a 47.

b) Két egymást követő természetes szám szorzata 552. Melyik ez a két szám?

**Megoldás:**

$n \cdot (n+1) = 552$

$n^2 + n - 552 = 0$

$n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 552}}{2}$

$n_1 = 23$ és $n_2 < 0$, így csak egy megoldás van, a 23.

c) Egy 8 fős társaságban mindenki mindenkivel kezet fog. Hány kézfogás lesz?

**Megoldás:**

Mindenki kezet fog saját magán kívül mindenkivel, de így minden kézfogást duplán számoltunk, mindkét fél részéről, ezért $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ kézfogás lesz.

d) Egy téglalap egyik oldalát 25 százalékkal megnöveltük. Hány százalékkal kell csökkenteni a szomszédos oldalt, hogy a területe ne változzon?

**Megoldás:**

$T_1 = a \cdot b$
$T_2 = (a \cdot 1,25) \cdot (b \cdot x)$
$T_1 = T_2$
$a \cdot b = (a \cdot 1,25) \cdot (b \cdot x)$
osztjuk mindkét oldalt $a \cdot b$-vel:
$1 = 1,25 \cdot x$, amiből x=0,8.
Tehát 20 százalékkal kell csökkenteni a másik oldalt.

9. Adottak a koordináta-rendszerben a következő pontok: A(2;3) , B(4;6).
a) Mekkora a két pont távolsága?

**Megoldás:**

$d = \sqrt{(2-4)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{13}$

b) Mi a két ponton átmenő egyenes egyenlete?

**Megoldás:**

$v = \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} = (2;3)$ irányvektorral felírható az irányvektoros egyenes-egyenlet:
$v_2x_0 - v_1y_0 = v_2x - v_1y$, azaz 3x-2y=0.

c) A két ponton átmenő egyenes és a $k$ kör metszéspontja, ahol
$k:\ x^2 + 4x + y^2 - 6y - 12 = 0$.

**Megoldás:**

egyenletrendszerrel: az egyenes egyenletéből kifejezve: $x = \frac{2y}{3}$, ezt behelyettesítve a köregyenletbe kapjuk:

$13y^2 - 30y - 108 = 0$

$y_{1,2} = \frac{30 \pm \sqrt{1836}}{26}$, amiből:

$y_1 \approx 2,8 \Rightarrow x_1 \approx 1,9$

$y_2 \approx 2,8 \Rightarrow x_2 \approx -0,3$

Tehát a két metszéspont: $M_1(1,9; 2,8)$ és $M_2(-0,3; -0,5)$.

d) Adja meg a $k$ kör középpontját és a sugarát!

**Megoldás:**

Átalakítva: $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$, amiből: Kp: $(-2; 3)$, $r = 5$.

10. Egy háromszögnek adott két oldala: $a$=3, $b$=5 és egy szöge: $\beta$=60°. Adja meg a háromszög hiányzó adatait!

**Megoldás:**

Szinusz-tétellel:

$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$, amiből $\alpha \approx 31,3°$.

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 88,7°$.

Szinusz-tétel:

$\frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$, amiből $c = 5,77$.

11. Egy derékszögű háromszög egyik befogója 5 cm, a rajta fekvő szöge 20°. Mekkora a háromszög területe?

**Megoldás:**

$\alpha = 20°$, $b = 5$ cm

$\tan \alpha = \frac{a}{b}$, amiből $a \approx 1,82$ cm, így $T = \frac{a \cdot b}{2} = 4,55$ cm$^2$.